UNIFEI - UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

PROVA DE CÁLCULO 1 e 2

PROVA DE TRANSFERÊNCIA INTERNA, EXTERNA E PARA PORTADOR DE DIPLOMA DE CURSO SUPERIOR - 30/11/2014

CANDIDATO: ______________________________

CURSO PRETENDIDO: ______________________________

OBSERVAÇÕES:

1. Prova **SEM** consulta;
2. A prova **PODE** ser feita a lápis;
3. **PROIBIDO** o uso de calculadoras e similares;
4. Duração: **2 HORAS**.

Questão 1 (10 pontos). Seja a função $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, qual o conjunto solução da inequação $f(x) < 0$ com $x > 0$?

a) $x > 2$ b) $1 < x < 2$ c) $\sqrt{2} < x < \sqrt{5}$ d) $2 < x < \sqrt{5}$ e) $x > \sqrt{5}$

Resposta: d)

Questão 2 (10 pontos). Questão Anula (Todos os candidatos receberão os pontos desta)

Questão 3 (10 pontos). Qual o valor de

$$\int_0^1 \frac{x^2}{4x^2+1}dx.$$

a) $\frac{4+\pi}{32}$ b) $\frac{\pi}{32}$ c) $\ln(4)$ d) $\frac{1}{4}\ln(2)$ e) $\frac{4-\pi}{32}$

Resposta: e)

Questão 4 (10 pontos). Qual o volume gerado pela rotação em torno do eixo x da região delimitada por $y = 0$ e $x^2 + y^2 < 1$?

a) $\frac{1}{2}$ b) 4π c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{4\pi}{6}$ e) π

Resposta: c)

Questão 5 (10 pontos). Avalie o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\nexists$ e) $+\infty$

Resposta: d)

Questão 6 (10 pontos). Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{\ln(1+x)}.$$

Resposta: Sabendo que

$$\lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) = 0$$

e

$$\ln(x) > 0 \quad \forall \quad x > 1.$$

Temos,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{\ln(1+x)} = +\infty.$$

Questão 7 (10 pontos). Calcule $\frac{dy}{dx}$ sendo

$$y = \operatorname{senh}\left(\operatorname{arcsen}\left(3^{x^2\ln(x)}\right)\right)$$

Resposta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cosh\left(\operatorname{arcsen}\left(3^{x^2\ln(x)}\right)\right) 3^{x^2\ln(x)} \ln 3\,(x + 2x\ln(x))}{\sqrt{(1 - 3^{2x^2\ln(n)})}}$$

Questão 8 (10 pontos). Considere B como sendo a região delimitada pelo triângulo no plano (x,y) e vértices em $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$, calcule

$$\iint_B e^{-y^2}\,dy\,dx$$

Resposta:

$$\iint_B e^{-y^2}\,dy\,dx = \iint_B e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^y e^{-y^2}\,dx\,dy,$$

logo,

$$\iint_B e^{-y^2}\,dy\,dx = \int_0^1 y e^{-y^2}\,dy = \frac{e-1}{2e}$$

Questão 9 (10 pontos). Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Resposta: Encontremos os pontos críticos, ou seja, os pontos onde $\nabla f(x,y)$ é nulo ou não está definido. Como a função é polinomial, precisamos encontrar apenas as raízes comuns das entradas do vetor gradiente.

$$f_x = 4(x^3 - y) = 0, \quad f_y = 4(y^3 - x) = 0.$$

Resolvendo obtemos, $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

Calculando as derivadas segundas $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$ e $f_{xy} = -4$ e o determinante Hessiano $H(x,y)$, temos

$$H(x,y) = 144x^2y^2 - 16.$$

Portanto,

- $H(0,0) = -16$, o que implica que $(0,0)$ é ponto de sela.
- $H(1,1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, o que implica que $(1,1)$ é ponto de mínimo local.
- $H(-1,-1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$, o que implica que $(-1,-1)$ é ponto de mínimo local.

Questão 10 (10 pontos). Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dê a definição matemática dos seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(p,q)} f(x,y) = L.$$

Resposta: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $(x,y) \in D$

$$0 < \|(x,y) - (p,q)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

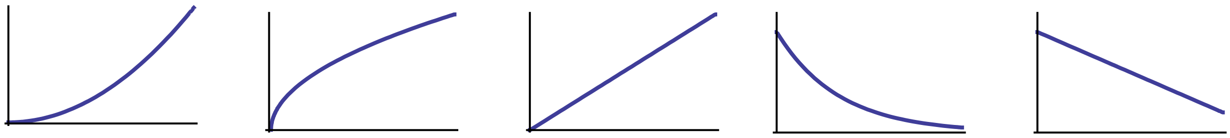
FÍSICA – PROVA DE TRANSFERÊNCIA INTERNA, EXTERNA E PARA PORTADOR DE DIPLOMA DE CURSO SUPERIOR – 30/11/2014

CANDIDATO: ____

CURSO PRETENDIDO: ______________________________________

OBSERVAÇÕES: 01 – Prova sem consulta.
02 – Duração: 2 HORAS

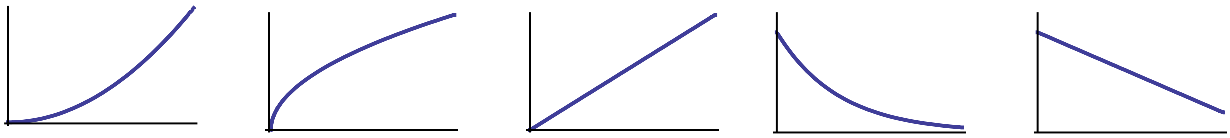
1) Uma esfera é solta a partir do repouso no ponto mais alto de um plano inclinado. Ela rola sem deslizar ao longo desse plano inclinado, descrevendo um movimento retilíneo. O gráfico que melhor representa o módulo da velocidade da esfera em função do tempo é:



(a) (b) (c) (d) (e)

Solução: Alternativa (c). A velocidade da esfera é dada por $v(t) = a\, t$. Portanto à medida em que o tempo passa, o módulo da velocidade aumenta linearmente com o tempo.

2) Considere a mesma situação descrita na questão anterior. O gráfico que melhor representa a distância percorrida pela esfera em função do tempo é:



(a) (b) (c) (d) (e)

Solução: Alternativa (a). A distância *d* percorrida pela esfera ao longo do plano inclinado é expressa pela função $d(t) = (1/2)\ a\ t^2$. Portanto à medida em que o tempo passa, a distância percorrida aumenta com o quadrado do tempo. Logo, o gráfico da distância em função do tempo é o gráfico de uma função quadrática.

3) A figura ao lado mostra um bloco sobre uma mesa horizontal que desliza para a direita com velocidade constante. Se a magnitude da força externa ***F*** mostrada na figura for igual a 2,0 N, é correto afirmar que a magnitude da força de atrito cinético entre bloco e a mesa:

a. é igual a zero;
b. é maior do que zero e menor do que 2,0 N;
c. é igual a 2,0 N;
d. é maior do que 2,0 N;
e. não pode ser calculada a partir dessas informações.

Solução: Alternativa (c). Como a velocidade do bloco é constante, a soma das forças externas que atuam sobre ele deve ser nula. Assim, a magnitude do peso é igual à magnitude da força normal e a magnitude da força ***F*** é igual à magnitude da força de atrito.

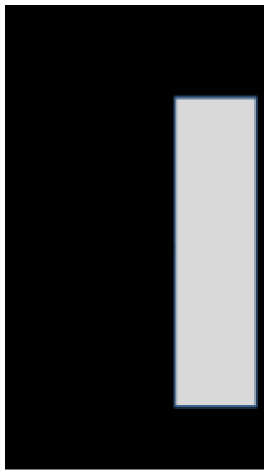
4) Um bloco de massa m_1 desloca-se com velocidade constante v_1 para a direita sobre uma superfície horizontal sem atrito e colide com um bloco de massa m_2 inicialmente em repouso. Após a colisão o bloco de massa m_1 fica parado e o outro passa a se mover com velocidade v_2 para a direita. Se v_1 for o dobro v_2 é correto afirmar que:

a. $m_1 = (1/4)\ m_2$.
b. $m_1 = (1/2)\ m_2$.
c. $m_1 = m_2$.
d. $m_1 = 2\ m_2$.
e. $m_1 = 4\ m_2$.

Solução: Alternativa (b). O momento linear se conserva nessa colisão. Se p_i for o momento linear do sistema antes da colisão e p_f o momento linear após a colisão, $p_i = p_f$. Então $m_1\ v_1 = m_2\ v_2$. Se $v_1 = 2\ v_2$ então $m_1 = (1/2)\ m_2$.

5) Uma força ***F*** horizontal comprime um bloco de massa 100 g contra uma parede vertical, como mostra a figura ao lado. Se o coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco for 0,60 e a aceleração da gravidade for 9,8 m/s^2, o menor valor que a magnitude da força ***F*** pode ter para que o bloco permaneça em repouso é:

a. 0,59 N.
b. 0,61 N.
c. 0,98 N.
d. 1,6 N.
e. 9,8 N.



Solução: Alternativa (d). Enquanto o bloco estiver em repouso, a soma das forças externas que atuam sobre ele será zero. Como a força resultante na direção horizontal é nula, a magnitude da força F é igual à magnitude da reação normal N. Na vertical a resultante também é nula, de modo que a magnitude do peso (mg) é igual à magnitude da força de atrito (μN). Portanto a magnitude da reação normal será mg/μ que vale 1,6 N. Assim, o menor valor que a magnitude da força F pode ter é 1,6 N.

6) Um automóvel se desloca em uma estrada retilínea horizontal com uma velocidade constante *v*. Se o motorista pisar repentinamente no freio, o automóvel se deslocará uma distância *d* com as rodas completamente travadas. Calcule a distância que o automóvel percorreria se a velocidade inicial fosse a metade da velocidade *v*.

Solução:

Enquanto o carro se desloca com as rodas travadas, a força resultante é a força de atrito entre a estrada e os pneus. De acordo com o teorema do trabalho-energia, o trabalho W realizado pela força resultante é igual à variação da energia cinética do carro ΔK. Portanto:

$$\begin{aligned} W &= \Delta K \\ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \\ -\mu N d &= 0 - \frac{1}{2}mv^2 \\ -\mu m g d &= -\frac{1}{2}mv^2 \\ \frac{v^2}{d} &= 2\mu g \end{aligned}$$

Desse resultado decorre que:

$$\frac{v^2}{d} = \frac{(v')^2}{d'} = 2\mu g = \text{constante}$$

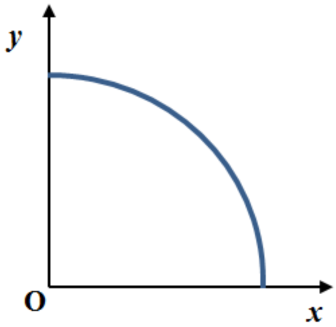
Então:

$$d' = \frac{(v')^2}{v^2}d = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 d$$

Se $v' = \frac{v}{2}$, então:

$$\begin{aligned} d' &= (\frac{1}{2})^2 d \\ d' &= \frac{d}{4} \end{aligned}$$

7) A figura ao lado mostra um fio homogêneo de massa M e comprimento L que tem o formato de um quarto de circunferência de raio R. Calcule a posição do centro de massa desse fio. Considere que a espessura do fio seja muito menor do que o raio R.



Solução:

A posição do centro de massa é dada por:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\,dm$$

Como o fio é homogêneo, sua densidade linear de massa λ pode ser expressa da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dl}$$

Nessa expressão, dm e dl representam, respectivamente, a massa e o comprimento de um elemento infinitesimal do fio. Em coordenadas polares o comprimento dl e o vetor posição $\vec{r}$ são expressos, respectivamente, por $dl = R\,d\theta$ e $\vec{r} = R\hat{r}$. Assim, a posição do centro de massa do fio será dada por:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{CM} &= \frac{1}{M}\int_0^{\pi/2} (R\hat{r})(\frac{M}{L}R\,d\theta) \\
\vec{r}_{CM} &= \frac{R^2}{L}\int_0^{\pi/2} \hat{r}\,d\theta \\
\vec{r}_{CM} &= \frac{R^2}{L}\int_0^{\pi/2} (\hat{\imath}\cos\theta + \hat{\jmath}\,\mathrm{sen}\theta)\,d\theta \\
\vec{r}_{CM} &= \frac{R^2}{L}\left[\hat{\imath}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta + \hat{\jmath}\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\theta\,d\theta\right] \\
\vec{r}_{CM} &= \frac{R^2}{L}\left[\hat{\imath}(\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} - \mathrm{sen}\,0) - \hat{\jmath}\,(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\,0)\right] \\
\vec{r}_{CM} &= \frac{R^2}{L}[\hat{\imath}(1-0) - \hat{\jmath}\,(0-1)] \\
\vec{r}_{CM} &= \frac{R^2}{L}(\hat{\imath} + \hat{\jmath})
\end{aligned}$$

Como L é o comprimento de um quarto de circunferência, $L = (2\pi R)/4$. Então a posição do centro de massa é:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{2R}{\pi}(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$

8) A energia potencial de uma partícula que pode se mover ao longo do eixo *x* é dada por $U(x) = -a/x$. Sabendo que *a* é uma constante positiva, calcule a força associada a essa energia potencial. Lembre-se de que a força é uma grandeza vetorial.

Solução:

A força associada a essa energia potencial é dada por:

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{\imath}$$

Portanto:

$$\vec{F} = -\frac{d}{dx}(-\frac{a}{x})\hat{\imath}$$

$$\vec{F} = a\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})\hat{\imath}$$

$$\vec{F} = -\frac{a}{x^2}\hat{\imath}$$

9) A massa do “jipe lunar” usado pela tripulação da nave Apollo 15 para se deslocar na Lua era de 490 kg quando totalmente carregado. Considerando uma velocidade de 3,1 m/s para esse veículo, calcule:

a) seu momento linear na superfície da Terra;
b) seu momento linear na superfície da Lua;
c) seu peso na superfície da Terra;
d) seu peso na superfície da Lua.

Considere que a aceleração da gravidade na superfície seja 9,8 m/s^2 na Terra e 1,6 m/s^2 na Lua

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} p &= mv \\ p &= 490 \text{ kg} \times 3{,}1 \text{ m/s} \\ p &= 1{,}5 \times 10^3 \text{ kg m/s} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} p &= mv \\ p &= 490 \text{ kg} \times 3{,}1 \text{ m/s} \\ p &= 1{,}5 \times 10^3 \text{ kg m/s} \end{aligned}$$

(c)

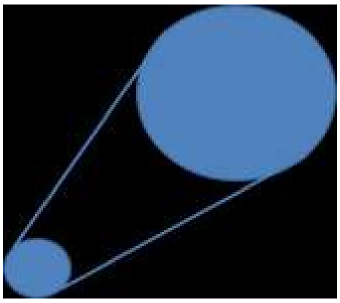
$$\begin{aligned} p &= mg_{\text{Terra}} \\ p &= 490 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \\ p &= 4{,}8 \times 10^3 \text{ N} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} p &= mg_{\text{Lua}} \\ p &= 490 \text{ kg} \times 1{,}6 \text{ m/s}^2 \\ p &= 7{,}8 \times 10^2 \text{ N} \end{aligned}$$

10) Considere um sistema formado por duas polias ligadas por uma correia, como mostra a figura ao lado. O raio da polia menor é 10 cm e o da polia maior é 30 cm. Quando a velocidade da correia for 8,0 cm/s, calcule:

a. a velocidade angular da polia menor;
b. a velocidade angular da polia maior.



Solução:

A velocidade v_C da correia é igual à velocidade tangencial de um ponto na perifeira de qualquer uma das polias. Seja A a polia menor e B a polia maior. Então:

(a)

$$\begin{aligned} v_A &= v_C \\ \omega_A R_A &= v_C \\ \omega_A &= \frac{v_C}{R_A} \\ \omega_A &= \frac{8{,}0\,\mathrm{cm/s}}{10\,\mathrm{cm}} \\ \omega_A &= 0{,}80\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} v_B &= v_C \\ \omega_B R_B &= v_C \\ \omega_B &= \frac{v_C}{R_B} \\ \omega_B &= \frac{8{,}0\,\mathrm{cm/s}}{30\,\mathrm{cm}} \\ \omega_B &= 0{,}27\,\mathrm{rad/s} \end{aligned}$$